**Heinrich-Heine-Universität**
Jun.-Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Dr. Peter Arndt

**Sommersemester 2017**
21.06.2017

# Lineare Algebra I
# Blatt 10

## 1 | Wettkochen

Welche Lösungsräume haben die folgenden linearen Gleichungssysteme in sechs reellen Variablen?

(a) $$\begin{cases} x_4 - 3x_5 + 4x_6 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - 4x_5 - 7x_6 = 0 \\ 3x_2 + 6x_3 - 4x_4 + 11x_6 = 4 \\ 4x_2 + 8x_3 - 5x_4 - x_5 = 5 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} x_4 - 3x_5 + 4x_6 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - 4x_5 - 7x_6 = 5 \\ 3x_2 + 6x_3 - 4x_4 + 11x_6 = 4 \\ 4x_2 + 8x_3 - 5x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

*Bitten geben Sie bei Aufgaben dieses Typs immer den vollständigen Lösungsweg an.*

## 2 | Dreigängemenü

Welche der durch die folgenden Matrizen definierten linearen Abbildungen $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ sind surjektiv? Welche injektiv? In den Kernen welcher Abbildungen liegt der Vektor $\left(\begin{smallmatrix}1\\4\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$? In den Bildern welcher Abbildungen liegt der Vektor $\left(\begin{smallmatrix}2\\4\\2\end{smallmatrix}\right)$?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

## 3 | Rollenspiel

Sei $\mathbf{x} \in (\mathbb{F}_3)^3$, $\mathbf{b} \in (\mathbb{F}_3)^3$. Wie viele Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{F}_3}(3 \times 3)$ gibt es mit $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$?
(Die Antwort sollte abhängen von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{b}$.)

## 4 | Potenzproblem

Wir nennen eine quadratische Matrix $A$ *nilpotent*, wenn eine ihrer Potenzen $A^k$ ($k \in \mathbb{N}$) die Nullmatrix ist. Eine *strikte obere Dreiecksmatrix* ist eine Matrix $(a_{i\,j})_{i,j}$ mit $a_{i\,j} = 0$ für alle $i \geqslant j$:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Strikte obere Dreiecksmatrizen sind nilpotent.
(b) Für jede nilpotente $n \times n$-Matrix $A$ ist $\mathbb{1}_n - A$ invertierbar.
(c) Welches Inverse hat die folgende Matrix?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Tipp zu Aufgabenteil (b):* $(1-a)^{-1} = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots$ *(„geometrische Reihe“)*

---

Bitte versehen Sie jede Lösung mit Namen, Übungsgruppen- und **ID-Nummer** und werfen Sie sie bis zum 28.06.2017, 10:30 Uhr in den für die jeweilige Aufgabe vorgesehenen Briefkasten ein (Etage 25.22.00).